453. 行列変換ト其ノ應用

福 原 滿 洲 雄（北大）

一階常微分方程式ノ特異點（I）＝就テハ一通リ述ベタカラ，次＝ハ特異點（I'）即チ

$$(1)\quad x\frac{dy}{dx}=y\,f(x,y,x^{p}y^{-1})$$

（p ハ正ノ整數，$f(x,y,z)$ ハ $(0,0,0)$ デ正則）

ヲ論ズル順序＝ナルノデアルガ、コレハ

$$x^{p}y^{-1}=z$$

ト置クコト＝ヨリ

$$(2)\quad \begin{cases} x\dfrac{dy}{dx}=yf(x,y,z) \\ x\dfrac{dz}{dx}=z\{\rho-f(x,y,z)\} \end{cases}$$

トナリ，此ノ形ノ方ガ(1)ヨリ扱ヒ易イカラ特異点(I)ノ結果ヲ聯立微分方程式ノ場合ニ擴張シ，然ル後特異点(I′)ニ戻ルコトニシヨウ、ソコデ一般ニ

$$(3)\quad x\frac{dy_j}{dx}=f_j(x, y_1, \cdots\cdots, y_n)\quad (j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ニ於テ $f_j(x, y_1, \cdots\cdots, y_n)$ ガ漸近的ニ $x, y_1, \cdots\cdots, y_n$ ノ冪級数ニ展開サレル場合ヲ考ヘルコトニナルノデアルガ，ソノ前ニ線形微分方程式ヲ論ジテ置カウ。

$$(4)\quad \frac{dy_j}{dt}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}(t)\,y_k\quad (j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ナル線形微分方程式ハ行列ヲ使ッテ

$$(5)\quad Y'=AY$$

ト書クコトガ出來ル、今コレニ $Y=PZ$ ナル置換ヲ行ッテ得ラレル方程式ヲ

$$(6)\quad Z'=BZ$$

ト書ケバ A, B ノ間ノ関係ハ

$$(7)\quad B=P^{-1}AP-P^{-1}P'$$

トナル、コノ行列変換ニ関シテハ既ニ *Perron* ノ研究(*Über eine Matrix transformation, Math. Zeitschift, 1930*)ガアリ，ソコデAガ有界($a_{jk}(t)$ ガ皆有界トイフ意味)ナ

ラバ，P, P^{-1}, P' ガ皆有界デアルヤウナ適當ナ P ニ依ッテ B ノ對角線ノ片側ヲ皆 0 トスルコトガ出來ルコトガ證明サレテヰル、彼ハ此ノ結果ヲ解ノ安定問題ニ應用シテヰルノデアルガ，此ノ行列變換ハソノ他ノ問題ニ應用シテモ有效デアル、

コヽデハ $a_{jk}(t)$ ガ

$$(8)\quad a_{jk}(t) \sim \sum_{s=0}^{\infty} a_{jk}^{(s)} e^{st} \qquad (j, k = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

ナル形ニ漸近的ニ展開サレル場合ニツイテ述ベヨウ、此ノ場合ニハ $P = (p_{jk}(t))$ トシテ $a_{jk}(t)$ ト同ジ所デ

$$(9)\quad p_{jk}(t) \sim \sum_{s=0}^{\infty} p_{jk}^{(s)} e^{st} \qquad (j, k = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

$$(10)\quad p'_{jk}(t) \sim \sum_{s=0}^{\infty} s\, p_{jk}^{(s)} e^{st} \qquad (j, k = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

ナル形ニ展開サレル $p_{jk}(t)$ カラ成ル行列ヲ取リ，此ノ P ヲ適當ニ選ブコトニヨリ行列 $B = (b_{jk}(t))$ ヲ成ルベク簡單ニスルトイフノガ目的デアル、$p_{jk}^{(0)}$ カラ成ル行列式ガ 0 デナイトスレバ $b_{jk}(t)$ モ亦

$$b_{jk}(t) \sim \sum_{s=0}^{\infty} b_{jk}^{(s)} e^{st} \qquad (j, k = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

ナル形ニ展開サレルコトハ明カデアル。

先ヅ最初ハ展開式ガ何ヲ意味スルカヲ考ヘニ入レナイデ，唯形式的ノ計算デ成ルベク多クノ $b_{jk}^{(s)}$ ヲ 0 トスルヤウニ $p_{jk}^{(s)}$ ヲキメル、此ノ計算ヲ見易クスルニハ豫メ常數ヲ係數トスル變換ヲ行ッテ $(a_{jk}^{(0)})$ ナル行列ハ標準形ニナッテヰル

モノトシ，$(p_{jk}^{(0)})$ ハ単位行列 E トスルト都合ガヨイ、行列 $A^0=(a_{jk}^{(0)})$ ガ標準形デアルカラ

$$A^0=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} \overbrace{A_1^0}^{n_1} & & & & 0 \\ & A_2^0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \overbrace{A_m^0}^{n_m} \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \}\,n_1 \\ \}\,n_2 \\ \\ \\ \}\,n_m \end{array}$$

$$A_j^0=\begin{pmatrix} \lambda_j & & & & \\ 1 & \lambda_j & & & \\ & 1 & \lambda_j & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_j \end{pmatrix}$$

トナル、ソコデ行列 B ヲ

$$B=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} \overbrace{B_{11}}^{n_1} & \overbrace{B_{12}}^{n_2} & \cdots & \overbrace{B_{1m}}^{n_m} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mm} \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \}\,n_1 \\ \}\,n_2 \\ \\ \}\,n_m \end{array}$$

ナル形ニ m^2 個ノ行列ニ分ケル、$\lambda_j-\lambda_k$ ガ 0 又ハ正ノ整数デナイ時及ビ $\lambda_j=\lambda_k,\ j\neq k$ ノトキニハ $B_{jk}=0$ トスルコトガ出来ル、又 $B_{jj}=A_j^0$ トスルコトガ出来ル、残ル場

合ハ $\lambda_j-\lambda_k$ ガ正ノ整数 s ニ等シイ場合デアル、此ノ時ニハ B_{jk} ヲ e^t ノ冪級数ニ（形式的ニ）展開シタトキ，$1, e^t, \cdots\cdots, e^{(s-1)t}, e^{(s+1)t}, \cdots\cdots$ ノ係数ヲ 0 トスルコトが出来ル、e^{st} ノ係数ダケハ一般ニ 0 トナラナイ、故ニ

$$B_{jk}=B_{jk}^{(s)}e^{st} \qquad (\lambda_j-\lambda_k=s)$$

トナル、$B_{jk}^{(s)}$ ハ常数カラ成ル行列デアル、二ツノ λ ノ差ガ整数トナルヤウナモノハ其ノ実部ガ番号ト共ニ大キクナルヤウニ番号ヲツケタモノトスレバ $j>k$ デアル、ソノ時 $B_{jk}^{(s)}$ ノ最モ上ノ列（又ハ最モ右ノ行）ダケヲ除イテ残リノ部分ヲ両 0 トスルコトが出来ル、コノヤウニシテキメラレタ B ハ e^t ノ整多項式トナルカラ

$$(11)\qquad b_{jk}(t)=\sum_s b_{jk}^{(s)}e^{st} \qquad (j,k=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ニ依ッテ $b_{jk}(t)$ ヲ定義スルコトが出来ル、ソノトキ微分方程式 (6) ハ直チニ求積法デ解ケル．

$a_{jk}(t)$ ガ例ヘバ半直線

$$(12)\qquad \tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0,\quad \sigma\leqq\sigma_0 \qquad (t=\sigma+i\tau)$$

ノ上デ連続デ漸近的ニ (8) ナル形ニ展開サレルナラバ，$p_{jk}(t)$ トシテ半直線 (12) ノ上デ連続デ (9) ナル形ニ展開サレル函数ヲ取ルコトが出来ルト言ヘナケレバ，唯形式的ニ $p_{jk}^{(s)}$ ヲキメルコトが出来ルトイフダケデハ面白クナイ、ソノヤウナ $p_{jk}(t)$ ノ存在ヲ証明スルニハ次ノヤウニスレバヨイ．(7) ヲ書キ換ヘテ

$$(13)\qquad P'=AP-PB$$

ヲ得ル、$a_{jk}(t)$ ハ與ヘラレタ函數，$b_{jk}(t)$ ハ上ノヤウニシテ既ニキマッタ函数デアルカラ (13) ハ n^2 個ノ未知函數 $p_{jk}(t)$ ニ關スル線形微分方程式デアル、其ノ係數ハ半直線 (12) ノ上デ連續デ，e^t ノ冪級數ニ漸近的ニ展開サレル．而モ (13) ヲ形式的ニ滿足スル級數 (9) ノ存在ガ分ッテヰル、サウイフ場合ニハ (13) ガ (9) ナル形ニ漸近的ニ展開サレル解ヲ唯一ツ持ツ、故ニ B ヲ上ニ述ベタヤウニキメタ時 (7) ガ成立スルヤウナ $p_{jk}(t)$ ハ確カニ存在スル、若シ $a_{jk}(t)$ ノ漸近展開ガ

(14) $\tau_1+\sigma\tan\theta_1 \leqq \tau \leqq \tau_2+\sigma\tan\theta_2 \qquad \sigma\to-\infty$

ノ時成立スルナラバ $p_{jk}(t)$ ノ漸近展開モソコデ成立スル。若シ $a_{jk}(t)$ ガ $2\pi i$ ヲ週期トスルナラバ $p_{jk}(t)$ モ $2\pi i$ ヲ週期トスル、從ッテ級數 (8) ガ收斂ナラバ級數 (9) モ收斂デアル。

コレカラ已ニヨク知ラレタ確定特異点ニ於ケル基本解ノ形ガ求マル。

結局 (4) ヲ形式的ニ滿足スル級數

(15) $$y_j \sim \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_j^{(s)} e^{st} \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ガ存在スルトイフ特別ナ場合ニ漸近的ニ (15) ナル形ニ展開サレル (4) ノ解ノ存在ヲ論ジテ置ケバ行列変換 (7) ニ關スル形式的ノ結果ト組合セルコトニヨッテ、行列変換 (7) ガ片ヅイタコトトナリ、ソノ結果簡單ナ形ヲ持ツ微分方程式 (6) ヲ積分スルコトニヨリ一般ノ場合ニ於ケル (4) ノ基本解ノ形ガ求マ

ルノデアル、漸近的ニ(15)ナル形ニ展開サレル(4)ノ解ノ存在ヲ論ズルニハ今迄屡々述ベテ来タ論法ヲ使ヘベヨイ、而モ此ノ場合ニハ計算ハ頗ル簡単デアル。